КРИТЕРИИ И МЕТОДИКА ОЦЕНИВАНИЯ ВЫПОЛНЕННЫХ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАНИЙ МУНИЦИПАЛЬНОГО ЭТАПА ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

2023/24 учебный год

7-11 классы

7 класс

7.1. (*7 баллов*)

Перед началом урока отличник Миша увидел, что в классе на доске было записано задание на сложение двух целых чисел. Он мысленно сложил эти числа и получил 2023. Проказник Андрей подрисовал к одному из чисел на конце цифру 0. Когда начался урок, выполнять задание к доске вызвали Андрея. В результате сложения он получил число 2223. Определите, верно посчитал Андрей или нет?

Ответ: Андрей посчитал неверно.

Решение: обозначим написанные на доске целые числа через x и y. Тогда $x + y = 2023$. Пусть Андрей подрисовал 0 к числу x. Если дальнейшие вычисления Андрея верны, то $10x + y = 2223$. Вычитая записанные равенства, мы получим $9x = 200$, что невозможно ни для какого целого x.

7.2. (*7 баллов*)

Компот и Коржик решили проверить, кто из них быстрее добежит по прямой дороге от домика Бабушки до домика дяди Кекса. Когда Коржик пробежал 20 метров, Компот пробежал всего 16 метров. А когда Коржику оставалось 30 метров, Компоту оставалось 60 метров. Сколько метров составляет длина дороги от домика Бабушки до домика дяди Кекса? (Коржик и Компот выбежали одновременно, каждый из них бежал со своей постоянной скоростью.)

Ответ: 180.

Решение: когда Коржик пробежал 20 метров, Компот пробежал всего 16 метров, поэтому их скорости относятся как $5 : 4$. Когда Коржику оставалось пробежать 30 метров, пусть он уже пробежал $5x$ метров (x – не обязательно целое число). Тогда к этому моменту Компот пробежал $4x$ метров. Значит, общая длина всей дороги в метрах с одной стороны равна $5x + 30$, а с другой стороны – $4x + 60$. Получаем уравнение $5x + 30 = 4x + 60$, из которого находим $x = 30$. Следовательно, искомая длина составляет $5 \cdot 30 + 30 = 180$ метров.

7.3. (*7 баллов*)

В книжном магазине «Читайка» установлено следующее правило «суммирования» скидок: «если на товар действуют разные виды скидок, то они применяются последовательно друг за другом». Например, если на товар действуют две скидки А% и Б%, то первая скидка применяется к исходной стоимости товара, а вторая – к результату действия первой скидки. Сейчас в магазине действуют две скидки: «Сезонная» в 25% и «Случайная» – ненулевая скидка на целое число процентов, определяемая в момент оформления покупки. Виктор, имеющий карту постоянного покупателя, дающую скидку 20% на все товары, приобрел за 69 рублей книгу, начальная стоимость которой была 230 рублей. Каков был размер «Случайной» скидки?

Ответ: 50%.

Решение: заметим, что последовательность применений скидок несущественна, т.к. применение скидки в A% равносильно умножению стоимости товара на $\left(1-\frac{A}{100}\right)$.

Пусть R — величина «Случайной» скидки. Тогда в результате «суммирования» трех скидок мы получим

$$230\cdot\left(1-\frac{25}{100}\right)\cdot\left(1-\frac{20}{100}\right)\cdot\left(1-\frac{R}{100}\right)=69.$$

$$R = 50.$$

7.4. (*7 баллов*)

На уроке математики каждому из семи гномов нужно найти одно двузначное число, при прибавлении к которому числа 18 получалось бы число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Могут ли все числа, найденные гномами, оказаться различными?

Ответ: Да, могут.

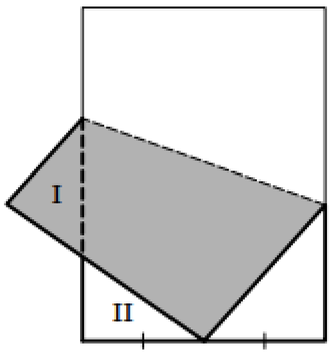
Решение: будем записывать двузначные числа в виде $\overline{xy}$, где x – число десятков, а y — число единиц. Найдем все допустимые числа. По условию $10x + y + 18 = 10y + x$. Преобразуем:

$10x + y + 18 = 10y + x$, $18 = 9y - 9x$, $y = x + 2$.

Поэтому нам подходят числа 13, 24, 35, 46, 57, 68, 79. Этих чисел столько же, сколько и гномов. Значит, гномы могли найти разные числа.

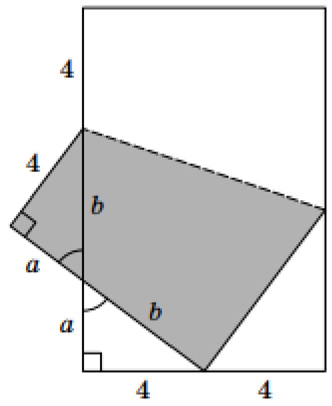
7.5. (*7 баллов*)

Прямоугольный лист бумаги согнули, совместив вершину с серединой противоположной короткой стороны. Оказалось, что треугольники I и II равны. Найдите длинную сторону прямоугольника, если короткая равна 8.



Ответ: 12.

Решение: отметим равные отрезки (см.рисунок – используем то, что в равных треугольниках против равных углов лежат равные стороны). Видим, что длина большей стороны равна $a+b+4$, а длина меньшей стороны равна $a+b$. Значит, $a+b=8$, и большая сторона имеет длину $a+b+4=8+4=12$.



8 класс

8.1. (*7 баллов*)

Назовём билет с номером от 000000 до 999999 «отличным», если в записи его номера имеются две соседние цифры, отличающиеся на 5. Сколько всего существует «отличных» билетов?

Ответ: $10^6 - 10\cdot 9^5$.

Решение: выясним, сколько всего билетов с шестизначным номером: $10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10=10^6$ (каждую цифру билета можно выбрать десятью способами).

Выясним, сколько «неотличных» билетов. Пусть $a_1a_2a_3a_4a_5a_6$ – номер «неотличного» билета. В качестве a_1 можно выбрать любую из 10 цифр. Цифры, разность между которыми равна 5, разбиваются на пары: 0–5, 1–6, 2–7, 3–8, 4–9. Поэтому, когда выбрана цифра a_1, в качестве цифры a_2 в «неотличном» билете можно взять любую из 9 цифр (исключается входящая в пару с a_1). Аналогично, после выбора a_2, в качестве a_3 можно взять любую из 9 цифр, и т. д. Поэтому число неотличных билетов равно:

$$10\cdot 9\cdot 9\cdot 9\cdot 9\cdot 9 = 10\cdot 9^5.$$

8.2. (*7 баллов*)

Если в произведении двух чисел первый множитель увеличить на 1, а второй уменьшить на 1, то произведение увеличится на 2023. Как изменится произведение исходных чисел, если, наоборот, первый множитель уменьшить на 1, а второй увеличить на 1?

Ответ: уменьшится на 2025.

Решение: пусть изначально были числа x и y (с произведением xy). После того как первый множитель увеличили на 1, а второй уменьшили на 1, получилось $(x + 1)(y - 1) = xy + y - x - 1$. Произведение увеличилось на 2023, то есть $y - x - 1 = 2023$ или $y - x = 2024$.

Если же первый множитель уменьшить на 1, а второй увеличить на 1, получится $(x - 1)(y + 1) = xy - y + x - 1$.

Заметим, что $xy - y + x - 1 = xy - (y - x) - 1 = xy - 2024 - 1 = xy - 2025$. То есть произведение уменьшилось на 2025.

8.3. (*7 баллов*)

Два графика линейных функций пересекаются при $x = 2$. При $x = 8$ значения отличаются на 8. При $x = 20$ значение одной из функций равно 100. Чему может быть равно значение другой функции?

Ответ: 76 или 124.

Решение: пусть $y = k_1x + b_1, y = k_2x + b_2$ – данные функции. По условию:

$$2k_1 + b_1 = 2k_2 + b_2,$$
$$8k_1 + b_1 - (8k_2 + b_2) = \pm 8,$$
$$20k_1 + b_1 = 100.$$

Нужно найти $20k_2 + b_2$.

Перепишем два первых соотношения в виде:

$$2(k_1 - k_2) + (b_1 - b_2) = 0,$$
$$8(k_1 - k_2) + (b_1 - b_2) = \pm 8.$$

Получаем, что $6(k_1 - k_2) = \pm 8$.

Тогда перепишем $20k_2 + b_2$:

$$20k_2 + b_2 = -20\,(k_1 - k_2) + (b_1 - b_2) + 20k_1 + b_1 =$$
$$= -(2\,(k_1 - k_2) + (b_1 - b_2)) - 18\,(k_1 - k_2) + 20k_1 + b_1 =$$
$$= 0 + 3 \cdot (\pm 8) + 100 = 100 \pm 24.$$

8.4. (*7 баллов*)

Про действительные числа a, b и c известно, что $ab + bc + ca = 3$. Какие значения может принимать выражение

$$\frac{a(b^2+3)}{a+b} + \frac{b(c^2+3)}{b+c} + \frac{c(a^2+3)}{c+a}?$$

Ответ: 6.

Решение: рассмотрим первое слагаемое искомого выражения. Воспользуемся условием, что $ab + bc + ca = 3$.

Тогда $b^2 + 3 = b^2 + ab + bc + ca = (b + a)(b + c)$.

Следовательно,

$$\frac{a(b^2 + 3)}{a + b} = \frac{a(b + a)(b + c)}{a + b} = a(b + c).$$

Аналогично для второго и третьего слагаемого получаем:

$$\frac{b(c^2+3)}{b+c} = b(c + a),\ \frac{c(a^2+3)}{c+a} = c(a + b).$$

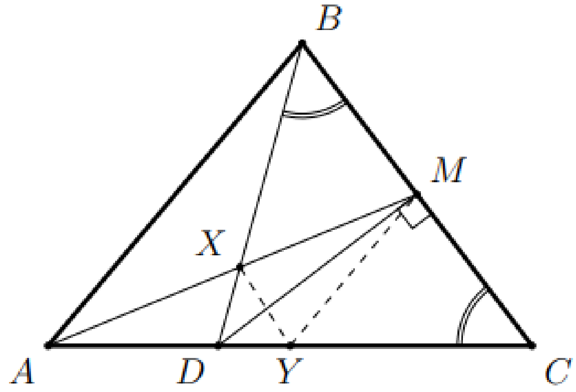
Таким образом,

$$\frac{a(b^2+3)}{a+b}+\frac{b(c^2+3)}{b+c}+\frac{c(a^2+3)}{c+a}=$$
$$=a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)=$$
$$=ab+ac+bc+ba+ca+cb=2(ac+bc+ca)=2\cdot 3=6$$

8.5. (*7 баллов*)

Точка *M* – середина стороны *BC* треугольника *ABC*. На отрезке *AC* нашлась такая точка *D*, что *DM* и *BC* перпендикулярны. Отрезки *AM* и *BD* пересекаются в точке *X*. Оказалось, что *AC* = 2*BX*. Докажите, что *X* – середина отрезка *AM*.

Решение. Поскольку *DM* ⊥ *BC* и *BM* = *MC*, то *DM* — высота и медиана в треугольнике *DBC*. Следовательно, треугольник *DBC* равнобедренный и *DB* = *DC*. На отрезке *DC* отметим точку *Y* так, чтобы *DX* = *DY*. Треугольник *DXY* получится равнобедренным с основанием *XY* . Также, по построению, *BX* = *CY*. Отсюда получаем, что *XY*∥*BC*. Поскольку *AC* = 2*BX* = 2*CY* и точка *Y* лежит на *AC*, то она — середина AC. Поэтому *XY* — средняя линия треугольника *AMC*, тем самым, *AX* = *XM*.



9 класс

9.1. (*7 баллов*)

Найдите наименьшее натуральное число, обладающее такими свойствами:

- его половина – квадрат целого числа;
- его треть – куб целого числа;
- его пятая часть – пятая степень целого числа.

Ответ: $2^{15}\cdot 3^{10}\cdot 5^{6}$.

Решение: пусть a – искомое число. Тогда $a=2^k\cdot 3^m\cdot 5^n$ (других множителей нет, так как *a* – наименьшее).

Найдем k, m, n.

$\frac{a}{2} = 2^{k-1} \cdot 3^m \cdot 5^n$ – квадрат целого числа, тогда показатели k - 1, m, n делятся на 2.

$\frac{a}{3} = 2^k \cdot 3^{m-1} \cdot 5^n$ – куб целого числа. Следовательно, числа k, m - 1, n делятся на 3.

Аналогично, числа k, m, n - 1 делятся на 5.

Итак, k – нечетное число (k делится на 3 и k делится на 5); k = 15 (наименьшее такое число). m – четное число, которое делится на 5; m = 10 (наименьшее такое число). n – четное число, которое делится на 3; n = 6 (наименьшее такое число).

Таким образом, $a = 2^{15} \cdot 3^{10} \cdot 5^6$.

9.2. (*7 баллов*)

В выходной день каждый из учеников класса один раз побывал на катке. Известно, что каждый мальчик встретил там своих одноклассниц. Докажите, что либо все мальчики, либо все девочки встретились друг с другом.

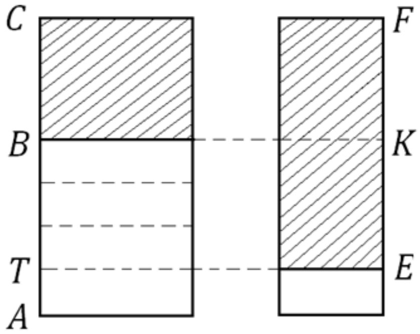
Решение: предположим, что не все девочки встретились друг с другом. Тогда есть девочки А и В такие, что А покинула каток раньше, чем туда пришла В. Но так как каждый мальчик встретился и с А, и с В, то все мальчики находились на катке весь промежуток времени между уходом А и приходом В. Тогда все мальчики встретились друг с другом. Отсюда вытекает условие задачи.

9.3. (*7 баллов*)

Имелось две свечи одинаковой длины, но разной толщины. Известно, что толстая свеча сгорает за 5 часов, а тонкая – за 4 часа. Когда погас свет, обе свечи зажгли одновременно. Когда свет вновь появился, свечи потушили. Оказалось, что огарок толстой свечи в 4 раза длиннее огарка тонкой свечи. Сколько времени горели свечи?

Ответ: 3 ч 45 мин.

Решение:



Изобразим штриховкой сгоревшие части свечей. Так как толстая свеча сгорает за 5 часов, а тонкая – за 4 часа, то тонкая свеча сгорает в 5/4 раза быстрее толстой: $FE = \frac{5}{4}BC$. Тогда $KE = \frac{1}{4}BC$ или $BC = 4KE$, $BT = KE$.

Так как $BT = KE$, то $AT = \frac{1}{3}BT = \frac{1}{3}KE$.

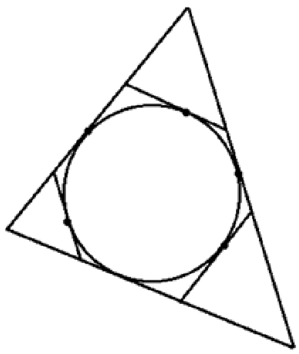
Тогда $AC = BC + BT + NA = 4KE + KE + \frac{1}{3}KE$, $AC = \frac{16}{3}KE$.

Составим пропорцию: $\frac{16}{3}KE : KE = 5 : x$, $x = \frac{15}{4}$ или 3 ч 45 мин.

9.4. (*7 баллов*)

В треугольник вписана окружность радиуса r. Касательные к этой окружности, параллельные сторонам треугольника, отсекают от него три маленьких треугольника. Пусть r_1, r_2, r_3 – радиусы вписанных в эти треугольники окружностей. Докажите, что $r_1 + r_2 + r_3 = r$.

Решение: Пусть P – периметр большого треугольника, p_1, p_2, p_3 – периметры маленьких треугольников.



Отрезки касательных, проведенных из одной точки к окружности равны, следовательно, $p_1 + p_2 + p_3 = P$ или $\frac{p_1}{P} + \frac{p_2}{P} + \frac{p_3}{P} = 1$.

Маленькие треугольники подобны большому, следовательно,

$$\frac{p_1}{P} = \frac{r_1}{r}; \frac{p_2}{P} = \frac{r_2}{r}; \frac{p_3}{P} = \frac{r_3}{r}.$$

Таким образом, получаем: $\frac{r_1}{r} + \frac{r_2}{r} + \frac{r_3}{r} = 1$ или $r_1 + r_2 + r_3 = r$.

9.5. (*7 баллов*)

Найдите все такие пары трехчленов $x^2 + ax + b$ и $x^2 + cx + d$, что корни второго трехчлена только числа a и b, а корни первого трехчлена – числа c и d.

Ответ: $x^2 + ax$ и $x^2 - ax$ (a – любое число); $x^2 + x - 2$ и $x^2 + x - 2$.

Решение: по теореме Виета:

$$a = -(c + d) \ldots (1)$$
$$b = cd \ldots (2)$$
$$c = -(a + b) \ldots (3)$$
$$d = ab \ldots (4)$$

Из (1) и (3) следует, что $a + c + d = 0$ и $a + c + b = 0$. Отсюда $b = d$.

Рассмотрим случаи:

а) $b = d = 0$, тогда из (1) и (3) следует, что $a = -c$.

При этих условиях получаем трехчлены $x^2 + ax$ и $x^2 - ax$. При любом a каждое из уравнений $x^2 + ax = 0$ и $x^2 - ax = 0$ имеет по два корня.

б) $b = d \neq 0$. Из равенств (2) и (4) следует, что $b = bc$ и $b = ab$ (так как $b \neq 0$, разделим оба равенства на b), тогда $c = 1$ и $a = 1$.

Получаем, что $1 + 1 + d = 0$, $d = -2$; $1 + 1 + b = 0$, $b = -2$.

Получаем еще пару трехчленов $x^2 + x - 2$ и $x^2 + x - 2$ (корни уравнения $x^2 + x - 2 = 0$ $x = -2$ и $x = 1$).

10 класс

10.1. (*7 баллов*)

Дан набор, состоящий из 100 различных чисел таких, что если каждое число в наборе заменить на сумму остальных, то получится тот же набор. Докажите, что произведение чисел в наборе положительно.

Решение: пусть M – сумма чисел в наборе. Тогда число a из набора заменяется числом $b = M - a$. Просуммируем эти равенства для всех a:

$$b_1 + b_2 + \dots + b_{100} = M - a_1 + M - a_2 + \dots + M - a_{100} =$$
$$= 100M - (a_1 + a_2 + \dots + a_{100}).$$

По условию $b_1 + b_2 + \dots + b_{100} = a_1 + a_2 + \dots + a_{100} = M$.

Тогда $2M = 100M, 98M = 0, M = 0$.

Значит, для любого a число $b = -a$ также входит в набор. Числа в наборе разбиваются на пары a и $-a$. Числа различные, следовательно, 0 не входит. Таким образом, среди набора 50 чисел положительных и 50 отрицательных. Произведение 50 отрицательных чисел будет положительным.

10.2. (*7 баллов*)

Найдите сумму корней уравнения $\left||x| - 7\right| = 6 - \frac{x^2}{4}$.

Ответ: 0.

Решение: заметим, что если есть решение $x = x_1$, то есть и решение $x = -x_1$.

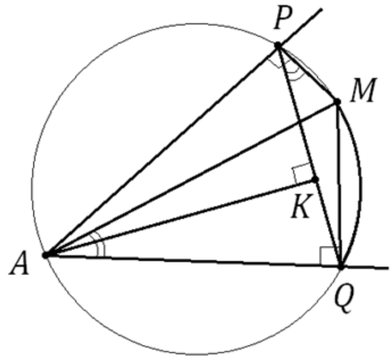
Легко проверить, что $x = 2$ является решением уравнения. Следовательно, корни уравнения существуют.

Не находя всех корней данного уравнения, можем заключить, что их сумма равна 0.

10.3. (*7 баллов*)

Из произвольной точки M внутри данного угла A опущены перпендикуляры MP и MQ на стороны угла. Из точки A перпендикуляр AK на отрезок PQ. Докажите, что $\angle PAK = \angle MAQ$.

Решение.



Рассмотрим четырехугольник $APMQ$: $\angle P + \angle Q = 180°$. Следовательно, около четырёхугольника $APMQ$ можно описать окружность. $\angle APM = 90°$, AM – диаметр этой окружности.

$\angle MAQ = \angle QPM$ как вписанные углы, опирающиеся на дугу MQ. $\angle PAK = \angle QPM$ как углы со взаимно перпендикулярными сторонами. Тогда $\angle PAK = \angle MAQ$.

10.4. (*7 баллов*)

В школьном шахматном блицтурнире каждый участник встречался с каждым по одному разу. Встречи каждого тура проходили одновременно. Опасаясь, что инвентаря не хватит, ровно половина участников принесла его из дома: большая часть из них принесла шахматы, а остальные принесли шахматные часы. В итоге, в каждом туре использовались одни принесенные часы и один из принесенных комплектов шахмат. По окончании турнира выяснилось, что каждый принесенный комплект шахмат использовался одинаковое количество раз и каждые принесенные часы также использовались одинаковое количество раз. Найдите количество участников турнира.

Ответ: 16.

Решение: пусть n – искомое количество участников, тогда, так как ровно половина участников принесла инвентарь из дома, то $n = 2k$, при этом количество сыгранных туров равно $2k - 1$. Предположим, что было принесено p комплектов шахмат и m часов, где $m < p$. Так как каждый из этих комплектов шахмат и каждые часы использовались одинаковое количество раз, то числа p и m являются делителями числа $2k-1$.

По условию, $k=p+m$, то есть $2k-1=2p+2m-1$. Так как $2k-1$ делится на p, то и $2m-1$ делится на p. Тогда, учитывая, что $m<p$, получим, что $2m-1=p$. Поскольку $2k-1$ делится на m, то и $2k-1=4m-3$ делится на m. Следовательно, m является делителем числа 3, то есть $m=1$ или $m=3$.

Первый случай невозможен, так как при $m=1$ $p=2m-1=1$ (противоречит тому, что $m<p$). Во втором случае: $m=3, p=5$, то есть $n=(5+3)\cdot 2=16$.

10.5. (*7 баллов*)

Корень трехчлена ax^2+bx+b умножили на корень трехчлена ax^2+ax+b и получили в произведении 1. Найдите эти корни.

Ответ: $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$ и $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$.

Решение: пусть t – один из указанных корней, то есть $at^2+bt+b=0$. Тогда другой корень равен $\frac{1}{t}$ и $a\frac{1}{t^2}+a\frac{1}{t}+b=0$, откуда $bt^2+at+a=0$.

Сложим равенства $bt^2+at+a=0$ и $at^2+bt+b=0$, получим: $(a+b)(t^2+t+1)=0$.

Так как второй множитель принимает только положительные значения, то $a+b=0$ или $b=-a$. Тогда первое уравнение принимает вид:

$$at^2-at-a=0, a(t^2-t-1)=0,$$

откуда $t=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{t}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Итак, условиям задачи удовлетворяют две пары чисел: $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$ и $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$.

11 класс

11.1. (*7 баллов*)

Можно ли представить число 2023 в виде суммы трехзначного числа и куба суммы цифр этого числа?

Ответ: нет.

Решение: пусть $2023=\overline{xyz}+(x+y+z)^3$.

Так как $100\le\overline{xyz}<1000$, то $1023<(x+y+z)^3<1923$.

Тогда $x+y+z$ может быть равно 11 или 12. Следовательно, $\overline{xyz}$ равно:

$$\overline{xyz}=2023-11^3=692, 6+9+2\neq 11 \text{ или}$$

$$\overline{xyz}=2023-12^3=295, 2+9+5\neq 11.$$

11.2. (*7 баллов*)

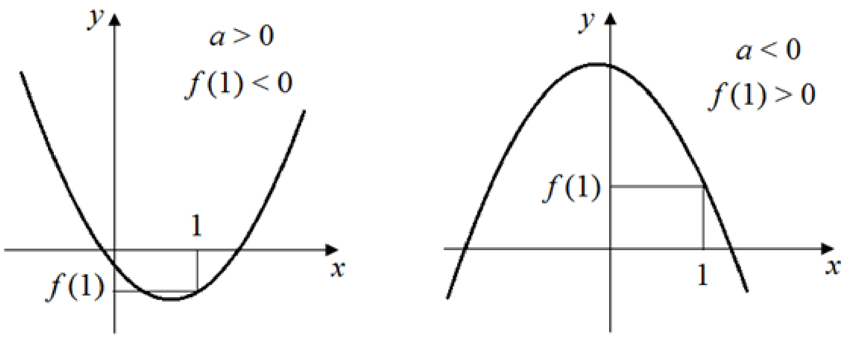
Докажите, что если $a(a+b+c)<0$, то уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет два действительных корня.

Решение: рассмотрим функцию $y=ax^2+bx+c$, графиком которой является парабола.

Заметим, что $y(1)=a+b+c$.

1) Пусть $a>0$, тогда по условию $y(1)<0$. Очевидно, что парабола пересечет ось Оx в двух точках. Следовательно, уравнение $ax^2+bx+c=0$ будет иметь два действительных корня.

2) Пусть $a<0$, тогда по условию $y(1)>0$. Очевидно, что парабола пересечет ось Оx в двух точках. Следовательно, уравнение $ax^2+bx+c=0$ будет иметь два действительных корня.



11.3. (*7 баллов*)

На 115 карточках написаны целые числа 1, 2, 3, 4,…, 115. Все карточки сложены в стопку так, что разность между числами на двух соседних карточках равна либо n, либо m. Оказалось, что для данных n и m существует только один способ сложить стопку с таким свойством. Какое число написано на нижней карточке стопки, если на верхней написано 19?

Ответ: 97.

Решение: пусть на соседних карточках стопки сверху вниз написаны числа $a_1, a_2, \dots a_{115}$. Составим стопку $116-a_{115}, 116-a_{114}, \dots, 116-a_1$.

Составленная стопка удовлетворяет условию задачи, так как разность между числами на соседних карточках также равна n или m:

$$116-a_k-(116-a_{k-1})=a_{k-1}-a_k.$$

По условию задачи стопку можно сложить единственным образом, поэтому вторая стопка получается из первой переворотом, т.е. $a_{115}=116-a_1=116-19=97$.

11.4. (*7 баллов*)

В школьном шахматном блицтурнире каждый участник встречался с каждым по одному разу. Встречи каждого тура проходили одновременно.

Опасаясь, что инвентаря не хватит, ровно половина участников принесла его из дома: большая часть из них принесла шахматы, а остальные принесли шахматные часы. В итоге, в каждом туре использовались одни принесенные часы и один из принесенных комплектов шахмат. По окончании турнира выяснилось, что каждый принесенный комплект шахмат использовался одинаковое количество раз и каждые принесенные часы также использовались одинаковое количество раз. Найдите количество участников турнира.

Ответ: 16.

Решение: пусть n – искомое количество участников, тогда, так как ровно половина участников принесла инвентарь из дома, то $n = 2k$, при этом количество сыгранных туров равно $2k - 1$. Предположим, что было принесено p комплектов шахмат и m часов, где $m < p$. Так как каждый из этих комплектов шахмат и каждые часы использовались одинаковое количество раз, то числа p и m являются делителями числа $2k - 1$.

По условию, $k = p + m$, то есть $2k - 1 = 2p + 2m - 1$. Так как $2k - 1$ делится на p, то и $2m - 1$ делится на p. Тогда, учитывая, что $m < p$, получим, что $2m - 1 = p$. Поскольку $2k - 1$ делится на m, то и $2k - 1 = 4m - 3$ делится на m. Следовательно, m является делителем числа 3, то есть $m = 1$ или $m = 3$.

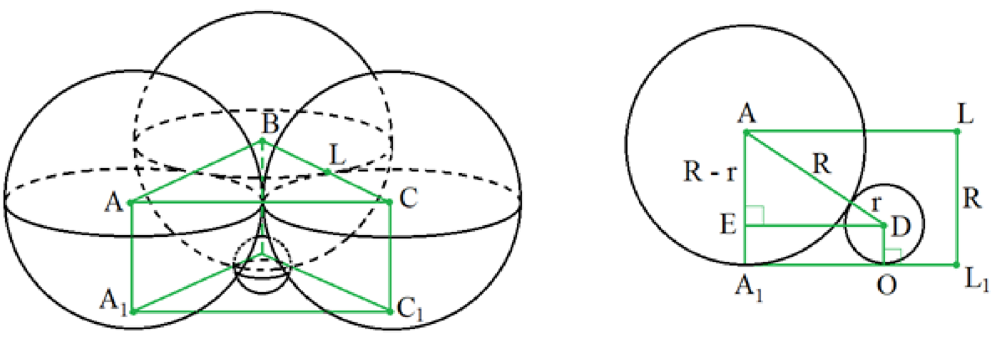
Первый случай невозможен, так как при $m = 1$ $p = 2m - 1 = 1$ (противоречит тому, что $m < p$). Во втором случае: $m = 3, p = 5$, то есть $n = (5 + 3) \cdot 2 = 16$.

11.5. (*7 баллов*)

Три шара радиуса R касаются одной плоскости и попарно касаются друг друга. Найдите радиус четвёртого шара, касающегося трёх данных и той же плоскости.

Ответ: $\frac{R}{3}$.

Решение.



Центры шаров A, B, C и точки касания A_1, B_1, C_1 являются вершинами прямой призмы с высотой $AA_1 = R$, в основании которой лежит правильный треугольник со стороной $2R$. Центр D малого шара проектируется в центр треугольника $A_1B_1C_1$ – точку пересечения медиан (высот). Пусть L и L_1 –

середины сторон BC и B_1C_1 соответственно. Рассмотрим сечение шаров плоскостью AA_1L_1L:

$$ED^2 = AD^2 - AE^2, ED = A_1O = \frac{2}{3}A_1L_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2R\sqrt{3}}{2} = \frac{2R}{\sqrt{3}}.$$

$$\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right)^2 = (R+r)^2 - (R-r)^2, \frac{4R^2}{3} = 4Rr, r = \frac{R}{3}.$$